جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
شانزدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۷

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۶۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۶۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$، تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geq a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4$$

۲- مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره محاطی آن و D نقطه تقاطع AI با دایره مذکور [با دایره محیطی مثلث ABC][1] است. فرض کنید E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2}AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۳- فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. n تایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_iها برابر n نشود. تمام n تاییهای «خوب» را پیدا کنید.
(به عنوان مثال ۳ تایی $(1,1,4)$ «خوب» است ولی ۵ تایی $(1,2,1,2,4)$ «خوب» نیست، زیرا حاصل جمع مؤلفه‌های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴- فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیه اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

۵- مثلث ABC که در آن $BC > CA > AB$ مفروض است. نقطه‌ی D را روی ضلع BC، و نقطه‌ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می‌گیریم که $BD = BE = AC$. دایره‌ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع می‌کند و BP نیز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. ثابت کنید $AQ + CQ = BP$.

۶- اگر $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دو n تایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی A و B را برابر تعداد i هایی می‌گیریم که $a_i \neq b_i$، $(1 \leq i \leq n)$.
(به‌عنوان مثال اگر $A = (0,1,1)$ و $B = (1,1,0)$، فاصله‌ی A و B برابر ۲ است.) حال فرض کنید که A، B و C سه n تایی از صفر و یک باشند، به‌طوری که فاصله‌ی دو به دوی آنها d است.
الف) نشان دهید که d زوج است.
ب) ثابت کنید که یک n تایی از صفر و یک، مثل D، وجود دارد که فاصله‌اش با A، B و C برابر $\frac{d}{2}$ است.

[1] در اصل صورت مسئله با لغت "مذکور" داده شده بوده است که صحیح نیست. اگر به‌جای لغت مذکور عبارت داخل کروشه گذاشته شود، صورت مسأله درست می‌شود. (مؤلفین)

پاسخ نامه تشریحی

۱- ابتدا حکم را به ازای $n = 3$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید x، y و z سه عدد طبیعی باشند و $x < y < z$. قرار دهید

$$S = xy^4 + yz^4 + zx^4$$
$$T = yx^4 + xy^4 + xz^4$$

در این صورت،

$$\begin{aligned}
S - T &= (x-z)y^4 + y(x^4 - z^4) + xz(x^3 - z^3) \\
&= (x-z)(y^4 - y(z^2 - x^2)(z+x) + xz(x^2 + xz + z^2)) \\
&= (x-z)(y^4 - yz^3 - yz^2x - yzx^2 - yx^3 + x^3z - x^2z^2 + xz^3) \\
&= (x-z)(y(y^3 - x^3) + z^3(x-y) + x^2z(x-y) + xz^2(x-y)) \\
&= (x-z)(x-y)(-y(x^2 + xy + y^2) + z^3 + x^2z + xz^2) \\
&= (x-z)(x-y)(-yx^2 - xy^2 - y^3 + z^3 + x^2z + xz^2) \\
&= (x-z)(x-y)((z-y)(z^2 + zy + y^2) + x^2(z-y) + x(z^2 - y^2)) \\
&= (x-z)(x-y)(z-y)(z^2 + zy + y^2 + x^2 + xz + yz) \\
&= \frac{1}{2}(x-z)(x-y)(z-y)((x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2) \geq 0
\end{aligned}$$

حال فرض کنید که حکم به ازای عدد طبیعی n برقرار باشد و اعداد $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ مفروض باشند. قرار می‌دهیم

$$S_n = a_1a_2^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4$$
$$S_{n+1} = a_1a_2^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 + a_{n+1}a_1^4$$

T_n و T_{n+1} نیز به همین ترتیب تعریف می‌شوند. روشن است که

$$S_{n+1} = S_n + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4 + a_na_1^4$$
$$T_{n+1} = T_{n1} + a_{n+1}a_n^4 + a_1a_{n+1}^4 + a_1a_n^4$$

پس

$$\begin{aligned}
&S_{n+1} - T_{n+1} = S_n - T_n + \\
&(a_1a_2^4 + a_na_{n+1}^4 + a_{n+1}a_1^4 - a_na_1^4 - a_{n+1}a_n^4 - a_1a_{n+1}^4)
\end{aligned}$$

بنابر فرض استقرا $S_n - T_n \geq 0$ و همچنین، بنابر حالت $n = 3$ (که در بالا ثابت کردیم) و توجه به این نکته که $S_n - T_n \geq 0$، جمله دوم نیز نامنفی است و بنابراین، حکم به استقرا ثابت می‌شود.

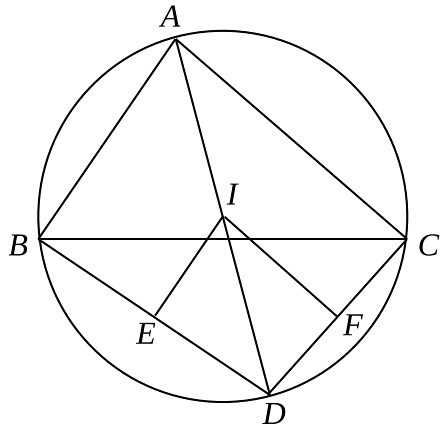
یادداشت. این مسأله در واقع حالت خاصی از قضیه‌ای کلی‌تر در مورد توابع محدب است. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم هر گاه، به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

اکنون با استدلالی مشابه استدلال گفته شده می‌توان ثابت کرد که اگر f تابعی محدب باشد و $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}
&x_1f(x_2) + x_2f(x_3) + \cdots + x_nf(x_1) \geq \\
&x_2f(x_1) + x_3f(x_2) + \cdots + x_1f(x_n)
\end{aligned}$$

۲- صورت صحیح مسأله: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره محاطی آن و D نقطه برخورد AI با دایره محیطی ABC است. فرض کنید E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2} AD$، زاویه $\angle BAC$ را پیدا کنید.



راه حل. بنابر قضیه‌ای از هندسه مقدماتی، $DI = DB = DC$. بنابراین، اگر R شعاع دایره محیطی ABC باشد،

$$IE = ID.\sin\angle BDI = ID.\sin C$$
$$= BD.\sin C \qquad = 2R\sin\frac{A}{2}\sin C$$

به همین ترتیب،

$$IF = 2R\sin\frac{A}{2}\sin B$$

و

$$AD = 2R\sin\angle ACD = 2R\sin(C+\frac{A}{2})$$

بنابر فرض مسأله،

$$2R\sin\frac{A}{2}\sin B + 2R\sin\frac{A}{2}\sin C = R\sin(C+\frac{A}{2})$$

و بنابراین،

$$\sin\frac{A}{2}(\sin B+\sin C) = \frac{1}{2}\sin(C+\frac{A}{2})$$

قرار می‌دهیم $X = C + \frac{A}{2}$. با جایگذاری X در معادله بالا به دست می‌آوریم

$$\sin\frac{A}{2}(\sin(X+\frac{A}{2})+\sin(X-\frac{A}{2})) = \frac{1}{2}\sin X$$

یا

$$2\sin\frac{A}{2}\sin X\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\sin x$$

و چون $X \neq 0$، نتیجه می‌شود

$$۲\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

یا $\sin A=\frac{۱}{۲}$ و درنتیجه، $\angle A=۳۰^\circ$.

۳- دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$a_۱,a_۱+a_۲,a_۱+a_۲+a_۳,\dots,a_۱+a_۲+\dots+a_n$$

ادعا می‌کنیم که هیچ دو جمله این دنباله به پیمانه n، همنهشت نیستند. در واقع، اگر $i<j$ و

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_i\equiv a_۱+a_۲+\cdots+a_j \pmod n$$

آنگاه، $n\mid a_{i+۱}+\cdots+a_j$ که خلاف فرض مسأله است. چون دنباله بالا n عضو دارد، پس این n عضو یک رده کامل مانده‌های به پیمانه n را تشکیل می‌دهند. به دلیل مشابه دنباله

$$a_۲,a_۱+a_۲,a_۱+a_۲+a_۳,\dots,a_۱+a_۲+\dots+a_n$$

نیز یک رده کامل مانده‌های به پیمانه n است. اما چون جملات دوم به بعد این دو دنباله یکی هستند، پس جملات اول باید به پیمانه n همنهشت باشند. یعنی، $a_۱\overset{n}{\equiv}a_۲$. با توجه به تقارن موجود در مسأله $a_۱,a_۲,\dots$ و a_n همگی به پیمانه n، همنشهت‌اند. فرض کنید

$$a_۱\equiv a_۲\equiv ۲\cdots\equiv a_n\equiv k \pmod{n}$$

در این صورت، به ازای هر $a_i\geq k, i=۱,۲,\dots,n$. بنابراین،

$$kn\leq a_۱+a_۲+\cdots+a_n=۲n$$

پس، $k=۱$ یا $k=۲$. اگر $k=۲$ ، باید برای هر i داشته باشیم $a_i=۲$ و بنابراین به جواب $(۲,۲,\dots,۲)$ می‌رسیم که به سادگی می‌توان دید که به ازای مقادیر فرد n یک جواب است. اگر $k=۱$ ، باید $n-۱$ تا از a_iها برابر ۱ و یکی از آنها برابر $n+۱$ باشد و به سادگی می‌توان بررسی کرد که برای هر عدد طبیعی مانند n، به تعداد n جواب به دست می‌آید:

$$(n+۱,۱,۱,\dots,۱)$$
$$(۱,n+۱,۱,\dots,۱)$$
$$\vdots$$
$$(۱,۱,۱,\dots,n+۱)$$

۴- ادعا می‌کنیم که n عددی زوج است. در غیر این صورت، $d_۴^۲,d_۳^۲,d_۲^۲,d_۱^۲$ اعدادی فرد خواهند بود و $d_۱^۲+\cdots+d_۴^۲$ عددی زوج است که با فرد بودن n تناقض دارد. بنابراین، $d_۱=۱$ و $d_۲=۲$.

اکنون، ادعا می‌کنیم که $d_۳$ یا ۴ است یا عددی اول. در واقع، اگر $d_۳=۲^\alpha(۲m+۱)$، آنگاه $۲m+۱$ مقسوم‌علیه n خواهد بود. پس، یا $۲m+۱=۱$ که نتیجه می‌دهد که $d_۳=۲^\alpha$ و با توجه به تعریف $d_۳$ نتیجه می‌شود $d_۳=۴$ یا $\alpha=۰$ که در این صورت، با توجه به این که $d_۳$ کوچکترین مقسوم‌علیه n بعد از ۲ است، $d_۳$ باید عددی اول باشد.

حالت اول. فرض کنید، $d_۳=۴$ ، در این صورت،

$$n=۱+۴+۱۶+d_۴^۲$$

پس، چون $d_۴ \mid n$ و $d_۴ \mid d_۴^۲$ نتیجه می‌شود $۲۱ \mid d_۴$. بنابراین، $d_۴ = ۷$ یا $d_۴ = ۲۱$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که جوابهای $n = ۷۰$ و $n = ۴۴۲$ به دست آمده، قابل قبول نیستند.

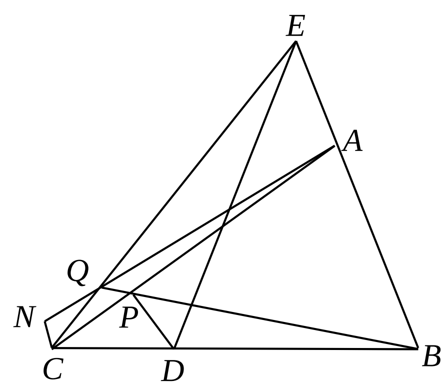
حالت دوم. فرض کنید، $d_۳ = p$ و p عددی اول باشد. در این حالت، تساوی $n = ۵ + p^۲ + d_۴^۲$ ایجاب می‌کند که $d_۴$ زوج باشد. پس، $d_۴ = ۴$ یا $d_۴ = ۲p$. اگر $d_۴ = ۴$ آنگاه $d_۳ = ۳$ و $n = ۳۰$ به دست می‌آید که قابل قبول نیست. پس، $d_۴ = ۲p$. بنابراین،

$$n = ۱ + ۴ + p^۲ + ۴p^۲ = ۵(۱ + p^۲)$$

و چون $p \mid n$. پس، $p \mid ۵$. بنابراین، $p = ۵$ و جواب $n = ۱۳۰$ به دست می‌آید که در معادله اصلی نیز صدق می‌کند و تنها جواب مسئله است.

۵- بنابر فرض مسأله، چهار ضلعی ABCQ چهار ضلعی محاطی است و درنتیجه،

$$\angle QAC = \angle QBC \qquad (۱)$$



همچنین از

$$\angle AQC + \angle ABC = ۱۸۰^\circ$$

نتیجه می‌شود

$$\angle ABC = \angle CQN$$

در اینجا، N نقطه‌ای روی AQ (نزدیک به Q) است که $QC = QN$. دو مثلث EBD و CQN دو مثلث متساوی‌الساقین هستند که زاویه رأس آنها نیز مساوی است؛ یعنی، داریم:

$$\angle CNQ = \angle DEB \qquad (۲)$$

حال، چون چهار ضلعی EBDP محاطی است،

$$\angle BPD = \angle DEB = \angle CNQ \qquad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۳) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\angle QAC + \angle CNQ = \angle QBC + \angle DPB$$

$$۱۸۰^\circ - \angle NCA = ۱۸۰^\circ - \angle PDB$$

$$\angle NCA = \angle PDB \qquad (۴)$$

$$\angle DEB$$

حال، از رابطه‌های (۱) و (۴) و تساوی $AC = BD$ ، نتیجه می‌شود که دو مثلث BDP و ACN برابرند. پس،

$$BP = AN = aQ = QN \qquad (۵)$$

و چون $QN = QC$، نتیجه می‌شود $BP = AQ + QC$ که همان حکم مسئله است.

۶- الف) فرض کنید $A = (a_۱,\ldots,a_n)$، $B = (b_۱,\ldots,b_۲)$ و $C = (c_۱,\ldots,c_۲)$. توجه کنید که اگر هر سه مؤلفه a_i، b_i و c_i را تغییر دهیم (یعنی از صفر به یک و از یک به صفر تبدیل کنیم)، در فاصله دوبه‌دوی این دنباله‌ها تغییری ایجاد نمی‌شود. پس، بدون کم شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که $A = (۰,۰,\ldots,۰)$. همچنین فرض کنید

$$B' = \{i \mid ۱ \le i \le n, b_i = ۱\}$$
$$C' = \{i \mid ۱ \le i \le n, c_i = ۱\}$$

بنابر فرض مسأله، فاصله A از B و C به ترتیب برابر $|B'|$ و $|C'|$ و فاصله C و B برابر $|B'\Delta C''|$ است ($X\Delta Y$، تفاضل متقارن دو مجموعه، مجموعه همه اعضایی است که درست به یکی از X و Y تعلق دارند). پس،

$$|B'| = |C''| = |B'\Delta C''| = d$$

فرض کنید

$$x = |B' - C'|, \qquad y = |C' - B'|, \qquad z = |B' \cap C'|$$

در این صورت،

$$x + y = x + z = y + z = d \qquad (*)$$

پس، $۳d = ۲(x + y + z)$ و بنابراین، $۳d$ زوج است. درنتیجه d زوج است.

ب) از دستگاه (*)، نتیجه می‌شود که

$$x = y = z = \frac{d}{۲}$$

حال اگر قرار دهیم $D' = B' \cap C'$ ، آنگاه

$$|D' \cap B'| = x = \frac{d}{۲}$$
$$|D' \cap C'| = y = \frac{d}{۲}$$
$$|D'| = z = \frac{d}{۲}$$

پس، اگر دنباله

$$D = (d_۱,\ldots,d_n)$$

را چنان بسازیم که $d_i = ۱$ ، اگر و فقط اگر $i \in D'$، آنگاه، فاصله D از هر یک از A، B و C برابر $\frac{d}{۲}$ است.